数理解析研究所講究録
1021巻 1997年 136-155

On the strong completeness theorems for the first-order generalized intuitionistic predicate calculus

静岡大学理学部　白井古希男 (Kokio Shirai)

§0. 序文

数理論理学の研究において，完全性定理は最も基本的な定理の1つである。完全性定理は，一般に次のように述べられる。

完全性定理 (completeness theorem) :

任意の sentence A について，A がすべての model で真ならば A は証明可能である。

あるいは，

任意の sentence A について，A が証明不可能ならば，A を偽にする model (反例) がある。

完全性定理を次のように拡張した定理が強完全性定理である。

強完全性定理 (strong completeness theorem, Generalized completeness theorem ともいう) :

K を sentence の任意の集合とする。

(i) Kが無矛盾ならば，Kはモデルをもつ．

(ii) 任意のsentence Aについて，KからAが証明不可能ならば，Kのmodelで，Aのmodelでないものがある．

あるいは，

任意のsentence Aについて，Kの任意のmodelがAのmodelならば，AはKから証明可能である．

論理体系$\mathcal{J}$の強完全性定理を$SCT_{\mathcal{J}}$とかく．$\mathcal{J}$の命題論理の体系の強完全性定理を，$SCT^{p}_{\mathcal{J}}$とかく．

generalized first-order languageにおける直観主義述語論理（LJ）の強完全性定理には，良く知られている形として，cHa（完備Heyting代数，完備擬Boole代数，完備Brower束，完備擬補束ともいう）による代数的semanticsによる定理と，Kripke semanticsによる定理とがある．

これら2つの定理は，良く知られているようにともにZFCの定理である．modelの概念に一歩ふみ込んだ以上，AC（選択公理）を使うことに何等不満があったわけではないが，それらの証明を詳細に眺めると，2つの定理には強さに明白な相違がある．すなわち，cHaによる定理はZFの定理であり，Kripke semanticsによる定理は，ZFより強い仮定を必要とすることである．この小論の目標は，このことを明確に示し，Kripke semanticsの強完全性定理の正確な条件を求めようとしたが，

不満足な結果に終った。

この問題を意識したのは、現九州大学大学院数理学研究科の高良弘志氏とのG. Takeuti「Proof Theory」(2nd edition) [1] のセミナーがきっかけであり、彼には新しい文献や証明を教えていただいた。高良氏には心から感謝する。また、高野道夫氏、塚田信高氏、小野寛晰氏はじめ諸先生には、色々御教示いただいた。心から感謝したい。

§1. 古典述語論理の完全性

まず、話を古典述語論理(LK)の場合から始める。

1.1 可算言語のとき:

古典述語論理の完全性と強完全性は、1930年にK. Gödel [2] によって証明された。Gödelはその証明にKönigのLemmaを用いたが、L. Henkin [3], G. Hasenjaeger [4] によって別証明とその改良が与えられ、さらに、H. Rasiowa-R. Sikorski [5] によって代数的証明が、K. Schütte [6] によりreduction treeの方法による証明が与えられた。その他Beth [7] のtableaux による証明等もある。G. Takeuti [1] には、LKの完全性定理がSchütte流の方法で示してある。

GödelやGödel-Henkinの証明は、逆数学においてより詳細に分析され、RCA_0 において、Gödel-Henkinの強完全性定理は、

WKL_0 と同値であることがわかっている．（H. Friedman [8]，S.G. Simpson [9]，田中一之[10] 参照）

1.2　非可算言語のとき．

Gödel-Henkin の強完全性定理（自然な semantics，2値 model による定理は．通常 AC，Zorn の Lemma，Teichmüller-Tukey の Lemma 等を用いて証明されるが．1954年．J. Łoś [11] は，ZF のもとで．強完全性定理は Boole 代数の Maximal ideal Theorem と同値であることを示した．1971年に．J.D. Halpern-A. Lévy [12] は．ZF において．Boolean prime ideal Theorem からは．AC は導けないことを示した．Boole 代数においては．Maximal ideal と Prime ideal は同じ概念になるから，強完全性定理（SCT_{LK}）は Boolean prime ideal Theorem (PIT_{BA}) と ZF で同値になり，SCT_{LK} は．ZF において AC より真に弱い仮定のもとで証明できることがわかったわけである．

PIT_{BA} は ZF において，Compactness theorem（Henkin (1954)），Stone の表現定理（Stone (1936)），Hausdorff 空間に関する Tychonoff の定理，任意の集合 I について the generalized cantor space $\{0,1\}^I$ が compact であること等とすべて同値であり（T.J. Jech [13]），また，PIT_{BA} からは．空でない互いに素な有限集合を元とする任意の集合が選択関数をもつことが ZF で導けるから，各自然数 $n (\geq 2)$ について，n 元集合を元とする任意の集合が選択関数をもつこと（AC_n）が導ける．

しかるに P.J. Cohen [14] によれば．ZF からは．可算集合についての AC_2 さえ証明不可能であるから，PIT_{Ba} は，従って2値 semantics による強完全性定理は，ZF の定理でないことがわかる．

定理． $ZF \vdash SCT_{LK} \leftrightarrow PIT_{Ba}$

$ZF \nvdash SCT_{LK}$.

§2. 直観主義述語論理の代数的 semantics による完全性定理．

ここでは．cHa による強完全性定理（SCT_{LJ}(cHa)）が．言語がたとえ非可算であっても ZF の定理であることを示す．

2.1. 可算言語のとき．

強完全性定理は．Rasiowa-Sikorski [5] によって証明された．

2.2 非可算言語のとき．

強完全性定理の証明を初めて明確に与えたのは，G.Takeuti [1] である．その証明は．2.1 の Rasiowa-Sikorski の方針に従っている．

Ha を完備化するとき，complete-ideal (c-ideal) を用いる方法 (A.S.Troelstra-D.van Dalen [15])，Dedekind-MacNeille による方法，topology による方法等が知られている．c-ideal による完備化と切断による Dedekind-MacNeille による完備化とは同じものである．以下に切断による方法で強完全性定理の証明をする．方針は

やはり 2.1 の Rasiowa-Sikorski の方針に従う.

2.21　言語をLとする. 自由対象変数と束縛対象変数とは, 可算無限コずつあるものとする. 変数が0の場合の述語記号は命題変数とみなす. 対象定数, 関数記号, 述語記号はいくらあってもよい. 述語記号は少くとも1つはあるものとする. Lを $L=\langle \{c_i \mid i\in I\}, \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f_j^n \mid j\in J_n\}, \bigcup_{n=0}^{\infty}\{P_k^n \mid k\in K_n\}\rangle$ とかく.

KをLの sentence の任意の集合, AをLの任意の sentence とする. $K \vdash_{\overline{LJ}} A$ とは, あるKに含まれる sentence の有限列Γがあって, sequent $\Gamma \rightarrow A$ が LJ-provable のこととする.

$\mathcal{H}=\langle H,\wedge,\vee,\rightarrow,0,1\rangle$ で Ha を, $\mathcal{H}=\langle H,\wedge,\vee,\rightarrow,0,1,\bigwedge,\bigvee\rangle$ で cHa を表わす. $\bigwedge$ は無限の inf を, $\bigvee$ は無限の sup を表わす. $\mathcal{H}$ を cHa とする. $\mathfrak{M}$ が $\mathcal{H}$-structure とは,

$\mathfrak{M}=\langle D, \{c_i^{\mathfrak{M}} \mid i\in I\}, \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f_j^{n\,\mathfrak{M}} \mid j\in J_n\}, \bigcup_{n=0}^{\infty}\{P_j^{n\,\mathfrak{M}} \mid k\in K_n\}\rangle$ であって,

1) Dは空でない集合, 2) c_i は対象定数であるから, $c_i^{\mathfrak{M}}$ はDの元, 3) f_j^n は n 変数関数であるから, $f_j^{n\,\mathfrak{M}}: D^n \rightarrow D$　4) P_k^n は n 変数述語記号であるから, $n=0$ のときは $P_k^{0\,\mathfrak{M}}$ はHの元, $n\geqq 1$ のときは, $P_k^{n\,\mathfrak{M}}: D^n \rightarrow H$　5) $\curlywedge^{\mathfrak{M}}=0$　の条件をみたすことをいう.

$\mathfrak{M}$ が $\mathcal{H}$-structure のとき, Lの拡張された言語 L(D) を $L\cup\{\bar{d} \mid d\in D\}$ とする. $\bar{d}$ はDの各元 d に対応する定数で, Dの異なる元には, 異なる対象定数が対応しているとする.

$\bar{d}^{\mathfrak{M}} = d$ とすると，$\mathfrak{M}$ は L(D) における $\mathcal{H}$-structure と考えうる．

L(D) の各 sentence A に対して，$\mathfrak{M}$ による真理値 $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}} \in H$ を以下のように定義する．

1. $[\![\curlywedge]\!]_{\mathfrak{M}} = \curlywedge^{\mathfrak{M}} = 0$，$[\![P_k^0]\!]_{\mathfrak{M}} = P_k^{0\,\mathfrak{M}}$，$n \geqq 1$ のとき，

   $[\![P_k^n(t_1, \cdots, t_n)]\!]_{\mathfrak{M}} = P_k^{n\,\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}})$ ここに，$t^{\mathfrak{M}}$ は term の $\mathfrak{M}$ による解釈である．

2. $[\![\neg A]\!]_{\mathfrak{M}} = \neg [\![A]\!]_{\mathfrak{M}}$，ここに，$\neg a \overset{\mathrm{def}}{=} a \to 0$ である．

3. $[\![A \wedge B]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![A]\!]_{\mathfrak{M}} \wedge [\![B]\!]_{\mathfrak{M}}$，$[\![A \vee B]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![A]\!]_{\mathfrak{M}} \vee [\![B]\!]_{\mathfrak{M}}$，$[\![A \supset B]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![A]\!]_{\mathfrak{M}} \to [\![B]\!]_{\mathfrak{M}}$

4. $[\![\forall x F(x)]\!]_{\mathfrak{M}} = \bigwedge \{ [\![F(\bar{d})]\!]_{\mathfrak{M}} \mid d \in D \}$，$[\![\exists x F(x)]\!]_{\mathfrak{M}} = \bigvee \{ [\![F(\bar{d})]\!]_{\mathfrak{M}} \mid d \in D \}$

5. 以上．

A が $\mathfrak{M}$ で真である（$\mathfrak{M} \models A$）とは，$[\![A]\!]_{\mathfrak{M}} = 1$ のこととする．

K を L(D) の sentence の集合，A を L(D) の sentence とするとき，

$K \models_{\mathfrak{M}} A$ を，K のすべての sentence が $\mathfrak{M}$ で真ならば A が $\mathfrak{M}$ で真であることとする．

$K \models_{\mathcal{H}} A$ とは，任意の $\mathcal{H}$-structure $\mathfrak{M}$ について $K \models_{\mathfrak{M}} A$ とする．

K を L の sentence の集合，A を L の sentence とするとき，

$K \models A$ とは，任意の cHa $\mathcal{H}$ について，$K \models_{\mathcal{H}} A$ とする．

このとき，cHa による強完全性定理は，次のように表現できる：

任意の言語と任意の sentence の集合 K と任意の sentence A について，

$$K \models A \text{ ならば } K \vdash_{\mathrm{I}} A$$

2.22 Lindenbaum-Tarskiの Lemma と Rasiowa-Sikorskiの embedding Lemma

2.221 Lindenbaum-Tarskiの Lemma

TをLの termの全体の集合, $\mathfrak{F}$をLの formulaの全体の集合とする.
$A, B \in \mathfrak{F}$に対し. $\mathfrak{F}$の2項関係 $A \sim B$ を.

$A \sim B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} K \vdash_{LJ} A \to B$ かつ $K \vdash_{LJ} B \to A$ によって定義すると, $\sim$は同値関係になる. Aの$\sim$による同値類を.

$[A] \overset{\text{def}}{=} \{B \in \mathfrak{F} \mid A \sim B\}$ とし, $\mathfrak{F}$の$\sim$による商集合をHとおく.

$H \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{F}/\sim = \{[A] \mid A \in \mathfrak{F}\}$

Hの元の間に, $[A] \wedge [B] \overset{\text{def}}{=} [A \wedge B]$, $[A] \vee [B] \overset{\text{def}}{=} [A \vee B]$, $[A] \to [B] \overset{\text{def}}{=} [A \supset B]$
$0 \overset{\text{def}}{=} [\perp]$, $1 \overset{\text{def}}{=} [A \supset A]$ と定義すると,

1) $\mathfrak{A} = \langle H, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$ は Ha である.

2) 任意の $F(a) \in \mathfrak{F}$ に対して, $[\forall x F(x)] = \bigwedge \{[F(t)] \mid t \in T\}$

$$[\exists x F(x)] = \bigvee \{[F(t)] \mid t \in T\}$$

3) Kの任意の sentence C について $[C] = 1$

となる.

2.222 Rasiowa-Sikorskiの embedding Lemma

任意の Ha $\mathfrak{A} = \langle H, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$ に対して, cHa $\mathfrak{A}^* = \langle H^*, \wedge^*, \vee^*, \overset{*}{\to}, 0^*, 1^*, \bigwedge^*, \bigvee^* \rangle$ と monomorphism $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^*$ が存在して,

$$(\#) \begin{cases} \bigvee \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \in H \text{ ならば. } \varphi(\bigvee \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}) = \bigvee^* \{\varphi(a_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \\ \bigwedge \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \in H \text{ ならば } \varphi(\bigwedge \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}) = \bigwedge^* \{\varphi(a_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \end{cases}$$

が成り立つ.

証明は，高良氏の方針に従う（P.T. Johnstone [16] 参照；記号は G. Birkhoff [17]，岩村[18] に従う）

$X \subset H$ に対して，$X^* = \{a \in H \mid \forall x \in X (x \leqq a)\}$，$X_* = \{a \in H \mid \forall x \in X (a \leqq x)\}$，

$a \in H$ に対して，$\downarrow(a) = \{x \in H \mid x \leqq a\}$ を表わすものとする．

$H^* \overset{\mathrm{def}}{=} \{X \in \mathcal{P}(H) \mid (X^*)_* = X\}$ とおく．すなわち，切断の下組の全体である．$A, B \in H^*$ に対して，$A \wedge^* B \overset{\mathrm{def}}{=} A \cap B$，$A \vee^* B \overset{\mathrm{def}}{=} (A^* \cap B^*)_*$，

$A \Rightarrow^* B \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in H \mid \forall a \in A (a \wedge x \in B)\}$，$0^* \overset{\mathrm{def}}{=} \downarrow(0)$，$1^* \overset{\mathrm{def}}{=} H$，

$\mathcal{G} \subset H^*$ に対して，$\bigwedge^* \mathcal{G} \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap \mathcal{G}$，$\bigvee^* \mathcal{G} \overset{\mathrm{def}}{=} (\bigcap \{X^* \mid X \in \mathcal{G}\})_*$ と定義すると，$\mathcal{H}^* = \langle H^*, \wedge^*, \vee^*, \Rightarrow^*, 0^*, 1^*, \bigwedge^*, \bigvee^* \rangle$ は cHa になる．

$H \ni a$ に対して，$\varphi(a) \overset{\mathrm{def}}{=} \downarrow(a)$ と定義すると，$\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ は monomorphism で性質 (#) をみたす．

注 1．Rasiowa-Sikorski のもとの Lemma は当然可算の inf, sup であり，一般の場合を初めて述べたのは G. Takeuti [1] である．しかし，その証明は複雑である．

注 2．c-ideal は R.P. Dilworth と McLaughlin によって束の場合に定義された．Ha において，c-ideal が切断の下組になっていることは，小野寛晰教授の指摘によって知った．

MackNille は，束の完備化の方法として，R. Dedekind の方法を用いた．現在は Dedekind-MackNille の完備化とよばれ，他の論理体系の完全性定理の証明にも応用されている（H. Ono [19] 参照）

2.223 強完全性定理（$SCT_{\text{口}}(CHa)$）の証明

$K \not\models A$ とする．$\mathcal{A}$ を K による Lindenbaum-Tarski algebra とすると．2.221 より Ha になり 1), 2), 3) をみたし，

4) $[A] \neq 1$ をみたす．そこで，2.222 の Lemma によって

$\mathcal{A}^*$, φ を作れば．(#) をみたす．

$\mathfrak{M} = \langle T, \{c_i^{\mathfrak{M}} \mid i \in I\}, \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f_j^{n^{\mathfrak{M}}} \mid j \in J_n\}, \bigcup_{n=0}^{\infty}\{P_k^{n^{\mathfrak{M}}} \mid k \in K_n\} \rangle$ を．

$c_i^{\mathfrak{M}} = c_i$, $f_j^{n^{\mathfrak{M}}} = f_j^n$, $P_k^{0^{\mathfrak{M}}} = \varphi([P_k^0])$, $P_k^{n^{\mathfrak{M}}}(t_1, \cdots, t_n) = \varphi([P_k^n(t_1, \cdots, t_n)])$

と定めると，$\mathfrak{M}$ は $\mathcal{A}^*$-structure となり．

(1) $L(T)$ の各 closed term t について $t^{\mathfrak{M}} \in T$

L の各 term $t(a_1, \cdots, a_\nu)$ と任意の term $t_1, \cdots, t_\nu$ について．

$$t(\bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_\nu)^{\mathfrak{M}} = t(t_1, \cdots, t_\nu)$$

(2) $L(T)$ の各 sentence C について $[\![C]\!]_{\mathfrak{M}} \in H^*$

L の各 formula $F(a_1, \cdots, a_\nu)$ と任意の term $t_1, \cdots, t_\nu$ について．

$$[\![F(\bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_\nu)]\!]_{\mathfrak{M}} = \varphi([F(t_1, \cdots, t_\nu)])$$

(3) $K \ni C$ なら $[C] = 1$ $\quad \therefore [\![C]\!]_{\mathfrak{M}} = \varphi([C]) = \varphi(1) = 1^*$

$[\![A]\!]_{\mathfrak{M}} = \varphi([A]) \neq \varphi(1) = 1^*$

が成り立つ．よって，

$\mathfrak{M} \models K$ かつ $\mathfrak{M} \not\models A$ $\quad \therefore K \not\models_{\mathfrak{M}} A$ $\quad \therefore K \not\models_{\mathcal{A}^*} A$ （証明終）

この証明は，すべて ZF でできるから

定理．$ZF \vdash SCT_{\text{口}}(CHa)$

§3. 直観主義述語論理の Kripke semantics による完全性定理

ここでは，Kripke semantics による強完全性定理（SCT_{LJ}(Kripke)）が，言語が可算ならZFの定理であるが，言語が非可算なら，ZFの定理でないことを示す．命題論理の場合ですら，完全な条件を示すことができなかったので，不本意ではあるが，いくつかの予想を述べるにとどめる．

3.1 可算言語のとき

完全性定理は，S. Kripke の "possible world semantics" の考えをもとに1965年に S. Kripke [20] によって初めて証明された．K. Schütte [21] には簡潔な証明がある．

強完全性定理は，R.H. Thomason [22], P.H.G. Aczel [23], M. Fitting [24] によってそれぞれ独立に1968, 1969年に証明された．

R.H. Thomason の証明は，Gödel-Henkin による LK の強完全性定理の証明のアナロジーである．saturated set という概念を定義し，

K: sentence の集合，A: sentence で $K \nvdash A$ ならば，新しい可算コの対象定数を追加して，拡大された言語での sentence の集合 p で，

1) $K \subset p$　2) $p \nvdash A$　3) p は拡大された言語での saturated set

をみたす p が ZF の中で構成できることを示す．

このことを用いて，Kripke semantics $\mathcal{K}=\langle \mathcal{P}, \subset, \vDash, D\rangle$ を，
$\mathcal{P}$ を saturated set の集合，$\subset$ を包含関係，prime formula R
について，$p\in\mathcal{P}$ のとき，$p\vDash R \leftrightarrow R\in p$ で定めると，
$(\mathcal{P}, \subset)$ は poset となり，Kripke semantics になる．D は domain
function である．

しかも，任意の $p\in\mathcal{P}$ で $p\vDash K$

$\because$ ある $p_0\in\mathcal{P}$ で $p_0\nVdash A$ がいえるから，

ZF で Kripke semantics による強完全性定理がいえる．

Thomason による saturated set による Kripke model の構成方法
は．C.A. Smorynski [25]，A.S. Troelstra-D. van Dalen [26] にみられ
るが．Smorynski は．saturated set は．分配束の prime filter に
相当するものであると書いている．

3.2 非可算言語のとき．

3.21．Heyting 代数についてのいくつかの定義と結果

命題論理の LJ の強完全性は．M. Fitting [24] による方法を用
いる．それは，Lindenbaum algebra から，Kripke model を作る方法で
ある．そのため，Heyting 代数についてのいくつかの定義の復
習と結果を述べる．

$\mathcal{H}=\langle H, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ を Ha とする．

1°．$F(\subset H)$ が $\mathcal{H}$ の (proper) filter とは，

1) $0\notin F$

2) $x \in F,\ x \leq y \rightsquigarrow y \in F$

3) $x \in F,\ y \in F \rightsquigarrow x \wedge y \in F$

をみたすことである．以下，proper filter を単に filter とよぶ．

2°. F が prime filter とは，F は filter であって，

4) $x \vee y \in F \rightsquigarrow x \in F$ or $y \in F$

3°. F が ultra filter とは，F は filter であって，

5) $\forall x \in H\ (x \in F$ or $\neg x \in F)$ 　ここに，$\neg x \stackrel{\mathrm{def}}{=} x \to 0$

4°. F が maximal filter とは，F は filter であって，

6) $\forall G\ (F \subset G \subset H \wedge G:$ filter $\rightsquigarrow G = F)$

Fact 1. Boole 代数では，prime filter，ultra-filter，maximal filter は同じ概念である．

Fact 2. Heyting 代数では，maximal filter と ultra filter は同じ概念であるが，prime filter はそれより真に弱い概念である．

5° $\phi \neq X \subset H$ のとき，

$[X] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a \in H \mid$ ある有限コの $x_1, \cdots, x_n \in X$ があって，$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leq a\}$

とする．

Fact 3. $\phi \neq X \subset H$ で，X の任意有限コの元の inf が 0 でなければ，

$[X]$ は X を包含する最小の filter になる．

Fact 4. $F:$ filter，$a \to b \notin F$ ならば $b \notin [F \cup \{a\}]$．

Fact 5. I が prime ideal なら，$F=\{x\in H \mid x\notin I\}$ は prime filter であり，F が prime filter なら $I=\{x\in H \mid x\notin F\}$ は prime ideal である.

6°. PFT_{Ba}, PFT_{Ha}

PFT_{Ba} とは，'任意の Boole 代数には，prime filter が存在する' という命題である.

同様に，PFT_{Ha}, PIT_{Ba}, PIT_{Ha} が定義される.

7°. $P'FT_{Ba}$, $P'FT_{Ha}$

$P'FT_{Ba}$ とは '任意の Boole 代数について，任意の filter は prime filter に拡張できる' という命題である.

8° $SPFT_{Ba}$, $SPFT_{Ha}$

$SPFT_{Ba}$ とは '任意の Boole 代数において，任意の filter F と任意の元 $a\notin F$ に対して，a を含まぬ，F の拡大となる prime filter が存在する' という命題である.

$SPFT_{Ha}$ も同様に定義される.

Fact 6. $ZF \vdash PFT_{Ba} \leftrightarrow PIT_{Ba}$

$ZF \vdash PFT_{Ha} \leftrightarrow PIT_{Ha}$

Fact 7. $ZF \vdash PFT_{Ba} \leftrightarrow P'FT_{Ba} \leftrightarrow SPFT_{Ba}$

$ZF \vdash PFT_{Ha} \leftrightarrow P'FT_{Ha}$

予想としては，$ZF \vdash PFT_{Ha} \leftrightarrow SPFT_{Ha}$

Fact 8. $ZF \vdash PFT_{Ha} \to PFT_{Ba}$

$ZF \vdash SPFT_{Ha} \to SPFT_{Ba}$

$ZF \vdash SPFT_{Ha} \to PFT_{Ha}$

Fact 9. $ZF \vdash AC \to SPFT_{Ha}$

Fact 10. $ZF \nvdash PFT_{Ba} \to AC$

3.22 命題論理のとき.

ここで示すことは次のことである.

定理. $ZF + SPFT_{Ha} \vdash SCT^{p}_{LJ}$ (Kripke)

証明. Fitting の方法による.

$K \nvdash A$ とする. K による Lindenbaum 代数を作ると. 2.221 より, 1) $\mathcal{H} = \langle H, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$: Ha

3) K の任意の formula C について. $[C]=1$

4) $[A] \neq 1$

がいえる.

$SPFT_{Ha}$, Fact 8 より PFT_{Ha} ∴ $\mathcal{H}$ には prime filter が存在する. $\mathcal{P}$ を $\mathcal{H}$ の prime filter の全体, $\subset$ を包含関係とすると. $(\mathcal{P}, \subset)$ は poset になる. $\mathcal{F}$ を formula の全体とする.

$F \in \mathcal{P}$, P: 命題変数のとき. 2項関係 $\models$ を.

$F \models P \Leftrightarrow [P] \in F$ で定めると.

任意の formula B について, $F \models B \leftrightarrow [\![B]\!] \in F$ がいえる. B の一番外の論理記号が $\supset$ のとき, $SPFT_{Ha}$ が用

いられる．これによって，$\mathcal{K}=\langle \mathcal{P}, \subset, \models \rangle$ とすると，これは命題論理 LJ の Kripke structure で，

任意の $F \in \mathcal{P}$ について，$F \models K$

一方，$G=\{1\}$ は filter で．$[A] \notin G$．よって，再び $SPFT_{Ha}$ によって，$[A] \notin F_0$，$G \subset F_0$，F_0 : prime filter となるものがある．　$\therefore$　$F_0 \models K$ かつ $F_0 \not\models A$

$$\therefore \quad K \not\models_{\mathcal{K}} A$$

（証明終）

注1．$ZF \vdash SPFT_{Ha} \to MIT_{Ba}$

$\because$ Fact 8より $ZF \vdash SPFT_{Ha} \to PFT_{Ba}$

$ZF \vdash PFT_{Ba} \leftrightarrow MIT_{Ba}$

注2．Fact 7の後の予想が正しければ

$ZF + PFT_{Ha} \vdash SCT^{p}_{LJ}(\mathrm{Kripke})$ が成立つ．

注3．　$ZF \not\vdash SPFT_{Ha} \to AC$　と予想しているが，まだ証明はない．

3.23　述語論理の場合．

まず，次のことは明らかである．

$ZF \not\vdash SCT_{LJ}(\mathrm{Kripke})$

$\because$ $ZF \vdash SCT_{LJ}(\mathrm{Kripke}) \to SCT_{LK}$

$ZF \vdash SCT_{LK} \leftrightarrow MIT_{Ba}$

しかるに 1.2 で注意したように $ZF \not\vdash MIT_{Ba}$

よって 成立．

$ZF + AC \vdash \Theta CT_{LJ}$ (Kripke)

であるが，例えば SPFTHa のような，AC より真に弱い公理から ΘCT_{LJ}(Kripke) が証明できるかは，今のところわからない。

最後に，日本語での完全性定理，強完全性定理についての文献として，前原[27]，倉田[28]，[29] がある。

参考文献

[1] G. Takeuti : Proof Theory, North-Holland (2nd edition) (1987)

[2] K. Gödel : Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. Phys., 37, (1930), 349-360

[3] L. Henkin : The completeness of the first-order functional calculus, J.S.L, 14, 159-166 (1949)

[4] G. Hasenjaeger : Eine Bemerkung zur Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikaten Kalküls der ersten Stufe, J.S.L, 18, 42-48, (1953)

[5]. H. Rasiowa-R. Sikorski : A proof of the completeness theorem of Gödel, Fund. Math, 37, 193-200 (1951)

H. Rasiowa-R. Sikorski : The Mathematics of Metamathematics, PWN (3rd edition) (1970)

[6] K. Schütte : Ein System des verknupfenden Schliessens, Archiv. Math. Logik Grundlagenf., 2, 55-67, (1956)

[7] E.W. Beth : Semantical entailment and formal derivability, Indag. Math, 19, 357-~~388~~, (1956)

[8] H. Friedman; Systems of second order arithmetic with restricted induction I, II (abstructs), J.S.L., 41, 557-559 (1976)

[9] S. G. Simpson : Subsystems of Z_2 and reverse mathematics, in G. Takeuti' Proof Theory, North-Holland (2nd edition), 432-446, (1987)

[10] 田中一之： 逆数学と2階算術，河合文化教育研究所，(1997)

[11] J. Lós : Sur la théorème de Gödel pour les theories in dombrables, Bull. de l'Acad. Polon. des Sci., III, vol 2, 319-320, (1954)

[12] J.D. Halpern and A. Lévy : The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice, in Axiomatic set theory, Proceedings of Symposia in pure Mathematics. vol XIII, Part 1, AMS, 83-134, (1967)

[13] T. J. Jech : The Axiom of choice, North-Holland, (1973)

[14] P.J. Cohen : The independence of the continuum hypothesis, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 50, 1143-1148 ; 51, 105-110, (1963)

[15] A.S. Troelstra and D. van Dalen : Constructivism in Mathematics, II, North-Holland, (1988)

[16] P.T. Johnstone : Stone spaces, Cambridge U.P., (1982)

[17]. G. Birkhoff : Lattice theory, AMS Colloquium publications vol 25,

(3rd edition), (1973)

[18] 岩村聯：束論，共立全書 161，(1967)

[19] H. Ono: Algebraic semantics for predicate logics and their completeness, to apper in Logic at Work (E. Orłowska ed.)

[20] S. Kripke: Semantical analysis of intuitionistic logic, I, in: J.N. Crossley and M.A.E. Dummett (ed.), Formal systems and recursive functions, North-Holland, 92-130 (1965)

[21] K. Schütte: Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik, Springer, (1968)

[22] R.H. Thomason: On the strong semantical completeness of the intuitionistic predicate calculus, J.S.L, 33, 1-7 (1968)

[23] P.H.G. Aczel: Saturated intuitionistic theories, in: H.A. Schmidt, K. Schütte, H.J. Thiele (ed.). Contributions to mathematical logic, North-Holland, 1-11, (1969)

[24] M. Fitting: Intuitionistic logic, model theory and forcing, North-Holland, (1969)

[25] C.A. Smorynski: Applications of Kripke models in: A.S. Troelstra (ed.) Mathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, Lecture Notes in Math., 344, Springer, (1973)

[26] A.S. Troelstra and D. van Dalen: Constructivism in Mathematics Vol I, North-Holland, (1988)

[27] 前原昭二：数理論理学，培風館，(1973)

[28] 倉田令二朗：完全性定理とカット消去定理，数学セミナー 1983，1月号

[29] 倉田令二朗：数学基礎論の発生と展開 1879-1931 (下) 2つの流れと完全性定理 Löwenheim-Skolem-Herbrand-Gödel，数学セミナー 1981，10月号